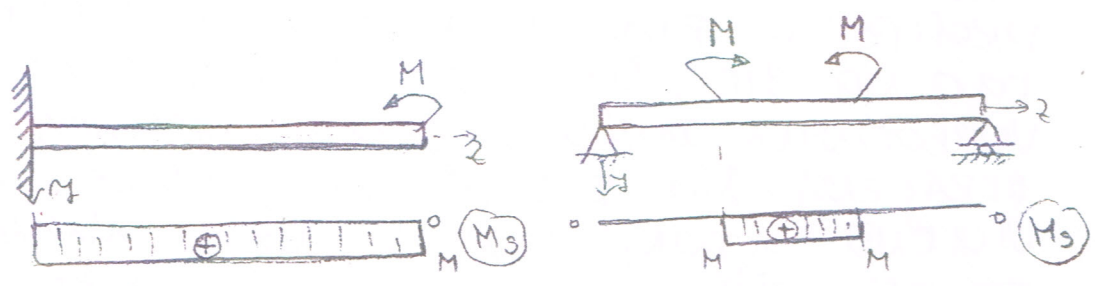


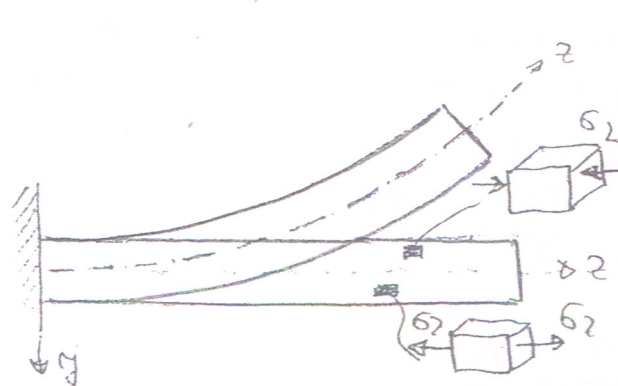
## 2. SAVIJANJE GREDNOG NOSAČA

### SAVIJANJE SPREGOVIMA

Pod SAVIJANJEM SPREGOVIMA GREDNOG NOSAČA PODRAZUMITEVA SE SLUČAJI MEGOVNE NAPREŽANJA (OPTEREĆIVANJA) KADA JE NOSAČ OPTEREĆEN SAMO SPREGOVIMA A NE I SILAMA ŠTO ZNAČI DA SE U PROJEKCIJOM PRESJEKU NOSAČA POJAVLJUJE SAMO MOMENT SAVIJANJA A NE I TRANSVERZALNA SILA (SL.)

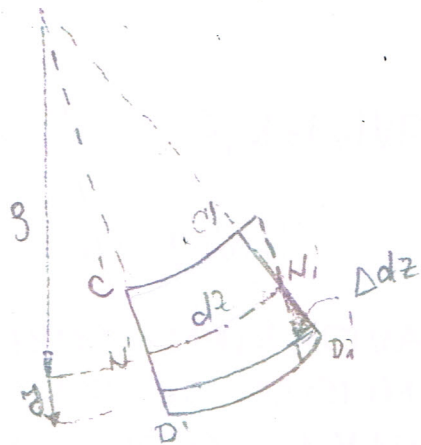
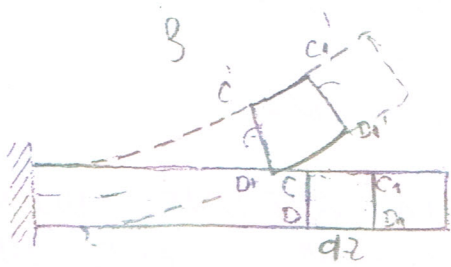


Pod DEJSTVOM TAKVOG OPTEREĆENJA NOSAČ SE SAVIJA (SL.) A TO ZNAČI DA SE DONJA VLAKNA NOSAČA ISTEŽU, A GORNJA SKRĆUJU (SL.) POŠTO SE



VLAKNA ISTEŽU Ili SKRĆUJU ZNAČI DA SU OPTEREĆENA NA ZATEŽANJE Ili PRITISAK ŠTO DAJE ZNAČI DA SE NA STRANAMA PROJEKCIJOM DIELICA

U OBLIKU ELEMENTARNOG KVADRA POJAVLJUJE NORMALNI NAPON  $\sigma_z$  SličNO KAO KOD AKSIJALNOG NAPREŽANJA. Ako je dielica uočEN SA DONJE STRANE U ODNOSU NA VEDUŽNU OSU OPTEREĆEN JE NA ZATEŽANJE a Ako je uočEN SA GORNJE STRANE U ODNOSU NA VEDUŽNU OSU KOD NOSAČA SA PRETHODNE SLUKE OPTEREĆEN JE NA PRITISAK.



Ako prite deformisanja nosaca uocimo jedan mekog dio u obliku pravougaonika CDC<sub>1</sub>D<sub>1</sub> duzine dz, nakon deformisanja nosaca, on prelazi u krivolinijski pravougonik D'C'D<sub>1</sub>C<sub>1</sub> kao na slici. Kod tog krivolinijskog pravougaonika donja vlakna su istegnuta a gornja skracena. Na primjer proizvodno uoceno vlakno sa donje strane na udaljenju y od ose cija je duzina prite deformisanja nosaca bila dz sada je usljed izduzenja porasla za prirastan delta dz i iznosi dz + delta dz. Ako sa beta oznacimo poluprecnik krivine zakrivljene ose nosaca iz slicnosti, delta D<sub>1</sub>C<sub>1</sub> i osiencenog malog trougla dobijamo

$$\frac{dz}{\beta} = \frac{\Delta dz}{y}$$

pa je

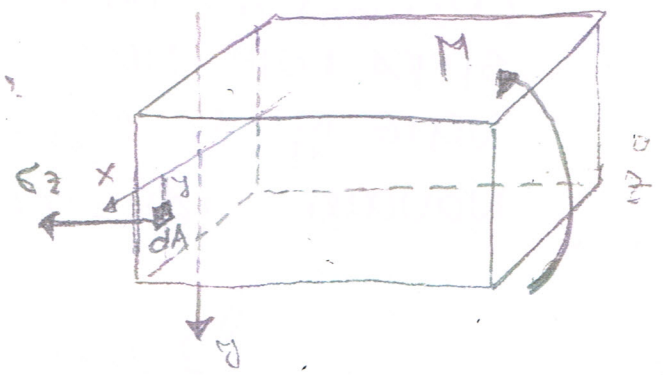
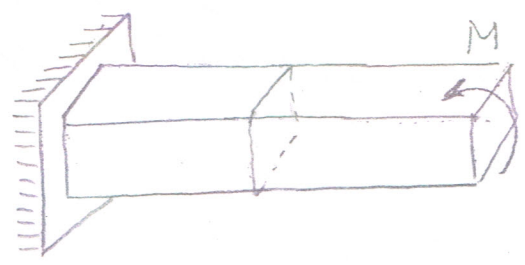
$$\frac{M}{\beta} = \frac{\Delta dz}{dz}$$

Postoje je  $\epsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{\sigma_z}{E}$  , VAZI

$$\sigma_z = E \cdot \frac{M}{\beta}$$

Ako posmatrati gredni nosac presie celom na proizvodnom mjestu i po-

SMATRAMO RAVNOTEŽU NPR. DESNOB DIELA  
(SL.) DOBIZAMO



$$\int_A \sigma_z dA \cdot y = M_s$$

ODNOSNO

$$\int_A E \cdot \frac{M}{S} \cdot y dA = M_s$$

PA JE

$$\frac{E}{S} \cdot \int_A y^2 dA = M_s$$

ODNOSNO

$$\frac{\sigma_z}{y} \cdot I_x = M_s$$

TI

$$\sigma_z = \frac{M_s}{I_x} \cdot y$$

ODJE JE  $I_x$  AKSIJALNI MOMENT INERCIE RAVNE POUKSI POPREČNOB PRESIEKA NOSAČA ZA TETISNU OSU  $x$ ,  $M_s$  JE MOMENT SAVIJANJA NOSAČA ZA POSMATRANI PRESIEK NOSAČA, A  $y$  JE KOORDINATA KOJA DEFINISE DIELO ZA KOJI ŽELIMO DA SKAČUNAMO NORMALNI NAPON. NORMALNI NAPON JE NAJVEĆI U ONIM PRESIECIMA NOSAČA ZA



koje moment savijanja ima najveću vrijednost ( $M_{smax}$ ) a u onim tačicama tog poprečnog presjeka koje imaju najveću vrijednost koordinate  $y$  tj.  $y_{max}$ . Dakle, izraz za stavljajući najveće napone je

$$\sigma_{zmax} = \frac{M_{smax}}{I_x} \cdot y_{max}$$

Taj najveći napon ne smije biti veću dozvoljenu vrijednost napona  $\sigma_{dovz}$  jer bi u protivnom došlo do loma nosača. Dakle,

$$\sigma_{zmax} = \frac{M_{smax}}{I_x} \cdot y_{max} \leq \sigma_{dovz}$$

Prethodni uslov je tzv. uslov za dimenzionisanje. Iz njega se za poznato  $M_{smax}$ ,  $\sigma_{dovz}$  mogu odrediti dimenzije poprečnog presjeka nosača tako da najveći napon ne pređe dozvoljenu vrijednost.

Odnos

$$\frac{I_x}{y_{max}} = W_x$$

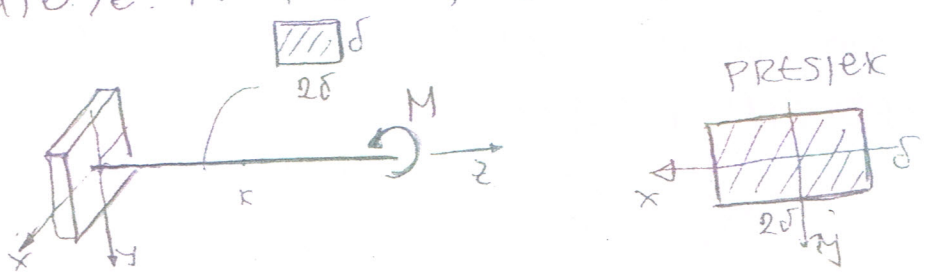
se zove aksijalni otporni moment.

**PRIMJER:** konzola AB pravougaonog poprečnog presjeka dimenzija  $2\delta \times \delta$  opterećena je silom  $M$  kao na slici.

a) dimenzionisati konzolu

b) izračunati napon  $\sigma_z$  u tački K (1,1,50)a.

DATOTE:  $M = 1 \text{ kNm}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $\sigma_{dov} = 14 \text{ kN/cm}^2$



a)  $I_x = \frac{2\delta \cdot \delta^3}{12} = \frac{\delta^4}{6}$ ;  $y_{max} = \frac{\delta}{2}$ ;  $M_{smax} = M$

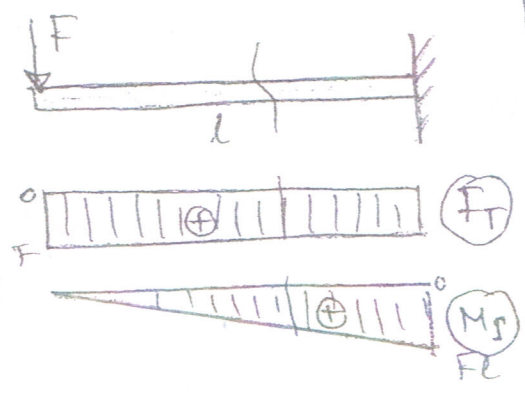
$$\sigma_{zmax} = \frac{M}{\frac{\delta^4}{6}} \cdot \frac{\delta}{2} = \frac{3M}{\delta^3} \leq \sigma_{dov}$$

PA 7E  $\delta \geq \sqrt[3]{\frac{3M}{\sigma_{dov}}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 1 \cdot 10^2}{14}} = 2,78 \text{ cm}$

b)  $\sigma_z^k = \frac{M}{\frac{\delta^4}{6}} \cdot y_k = \frac{1 \cdot 10^2}{\frac{2,78^4}{6}} \cdot 1 = 10,05 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

### 3. SAVIJANJE SILAMA

Pod savijanjem silama grednog nosača podrazumijevamo slucaj neobno naprezanja (opterećivanja) kada je nosač opterećen poprečnim (transverzalnim) opterećenjem  $F$  silama (sl.). Tada se u proizvoljnom po-



prečnom presjeku nosača pored momenta savijanja  $M_s$  pojavljuje i tra-  
nverzalna sila  $F_t$ . Kao  
posledica momenta sa-  
vijanja  $M_s$  (slučaj da  
kod savijanja sprego-

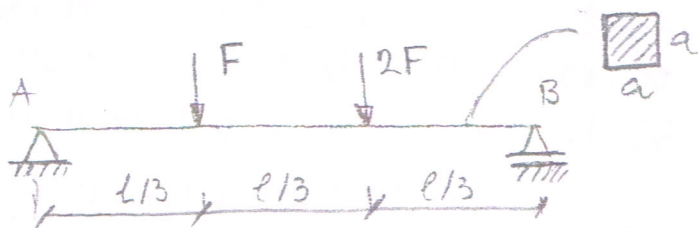
vima) kod proizvoljnog dieka u obliku kvat-

DRA SE POJAVLJUJE NORMALNI NAPON  $\sigma_z$  ODRE-  
ĐEN SLJEDEĆIM IZRAZOM

$$\sigma_z = \frac{Mz}{I_x} = \sigma$$

KAO POSLEDICA CINIENICE DA U POPREČNOM  
PRESJEKU NOSAČA POSTOJI TRANSVERZALNA SI-  
LA JAMA SE NA STRANAMA PROIZVODI DOP-  
LICA TANGENCIJALNI NAPON  $\tau_{xy}$ . VRIJE-  
DNOŠT TOGA NAPONA, KOD GREĐNOG NOSAČA  
KOD KOGA JE DUBINA MNOG VEĆA OD DIM-  
NIZIJA POPREČNOG PRESJEKA, JE POKAZUJE SE  
MNOGO MANJA OD VRIJEDNOŠTI NAJVEĆIH NO-  
RMALNIH NAPONA PA SE KAO TAKVI NA-  
JESICE ZANEMARUJU TI. NE UZIMAJU U OBZIR

**PRIMJER** ZA GREĐNI NOSAČ POKAZAN NA SLI-  
CI KVADRATNOG POPREČNOG PRESJEKA IZRA-  
ČUNATI MAKSIMALNI NORMALNI NAPON. DO-  
TO JE:  $F = 4 \text{ kN}$ ,  $l = 0,3 \text{ m}$ ,  $a = 3 \text{ cm}$ .



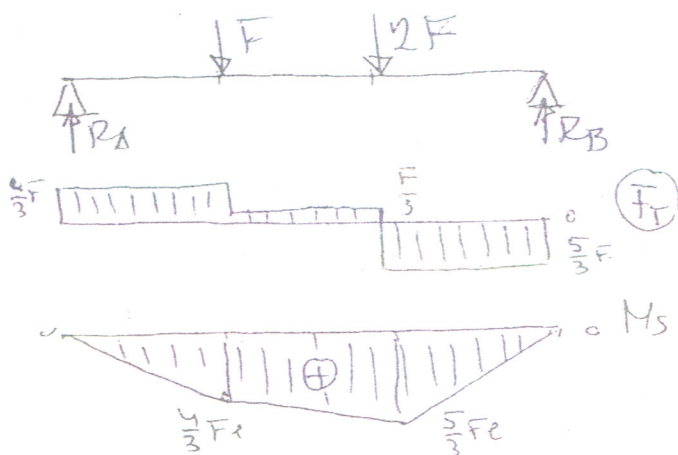
IZ USLOVA RAVNOTEŽE DOBISAMO VRIJEDNOŠTI  
REAKCIJA  $R_A$  I  $R_B$ .

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot l - 2F \cdot \frac{2}{3}l - F \cdot \frac{l}{3} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{5}{3}F$$

$$\sum F_v = 0: R_A + R_B - 3F = 0 \Rightarrow R_A = \frac{4}{3}F$$

STATIČKI DIAGRAMI I MOGU IZGLED KONA SL.



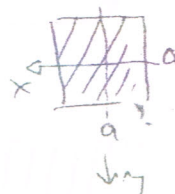


POSTOJE

$$M_{s\max} = \frac{5}{3} Fl$$

$$I_x = \frac{a^4}{12}$$

$$y_{\max} = \frac{a}{2}$$



TO JE

$$\sigma_{z\max} = \frac{5}{3} \frac{Fl}{a^4} \frac{a}{2} = \frac{10 Fl}{a^3}$$

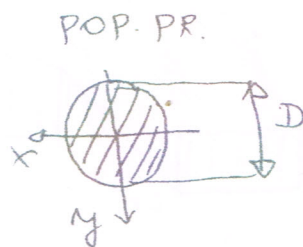
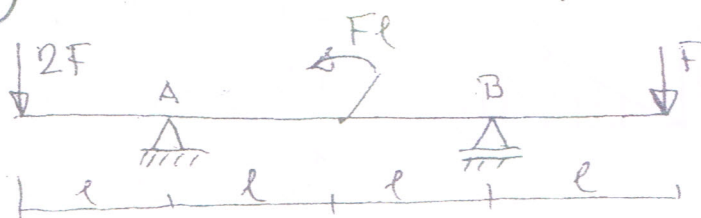
odnosno

$$\sigma_{z\max} = \frac{10 \cdot 10^2 \cdot 0,3}{3 \cdot 333} = \frac{100}{9} = 11,1 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$$

Ako je dozvoljeni napon npr.  $\sigma_{\text{dov}} = 14 \frac{\text{KN}}{\text{cm}^2}$  znači da neće doći do loma nosača  $\pi$ . Nosač može da izdrži zadato opterećenje.

**PRIMJER** ZA BREDNI NOSAČ OPTEREĆEN KAO NA SLICI IZVEŠTI IZRAZ ZA DIMENZIONISANJE POZNATO JE:  $F, l$  i  $\sigma_{\text{dov}}$ .

10



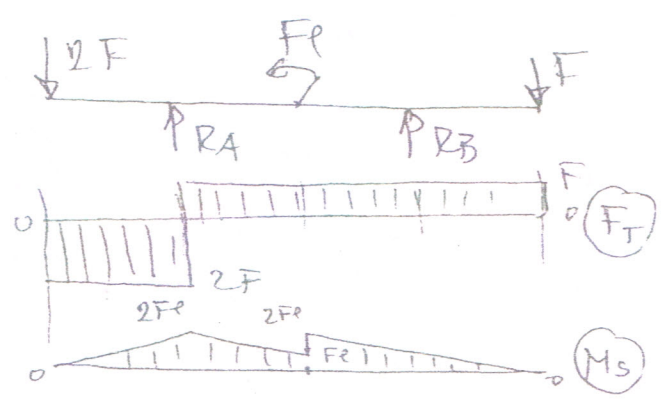
Iz uslova ravnoteže odredimo reakcije

$$\sum M_A = 0 \quad R_B \cdot 2l - F \cdot 3l + Fl + 2Fl = 0 \Rightarrow R_B = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad R_A + R_B - 3F = 0 \Rightarrow R_A = 3F$$

STATIČKI DIAGRAMI IMAJU IZGLED KAO NA SLICI

Posto 1e



$$M_{smax} = 2Fl$$

$$I_x = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$y_{max} = \frac{D}{2}$$

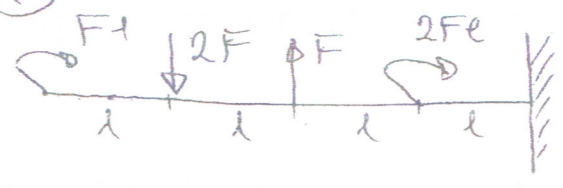
TO 1e

$$\sigma_{zmax} = \frac{2Fl}{\frac{\pi D^4}{64}} \cdot \frac{D}{2} = \frac{64Fl}{\pi \cdot D} \leq \sigma_{dovz}$$

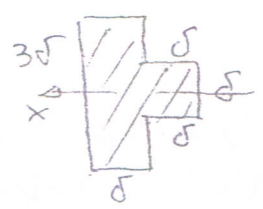
PA 2e

$$D > \sqrt[3]{\frac{64Fl}{\pi \cdot \sigma_{dovz}}}$$

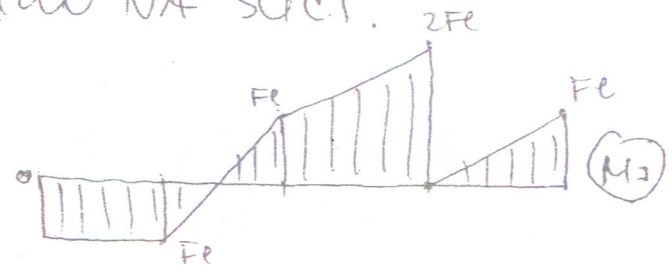
20



POP. PRESJEK



Dijagram momenta savijanja ima izgled kao na slici.



Posto 2e

$$M_{smax} = 2Fl$$

$$I_x = \frac{\delta \cdot (3\delta)^3}{12} + \frac{\delta^4}{12} = \frac{28}{12} \delta^4$$

$$I_x = \frac{7}{3} \delta^4, \quad y_{max} = \frac{3}{2} \delta$$

TO 1e

$$\sigma_{zmax} = \frac{2Fl}{\frac{7}{3} \delta^4} \cdot \frac{3}{2} \delta = \frac{9}{7} \frac{Fl}{\delta^3} \leq \sigma_{dovz}$$

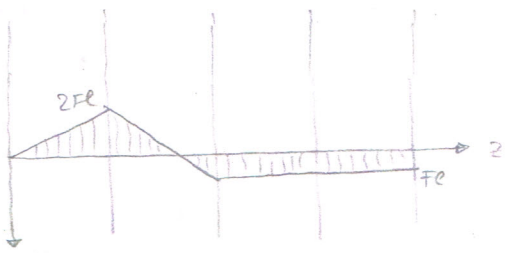
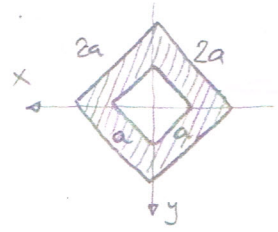
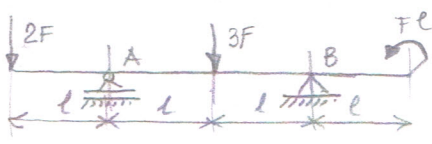
PA 1e

$$\delta > \sqrt[3]{\frac{9}{7} \frac{Fl}{\sigma_{dovz}}}$$



DIMENZIONISATI NOSAČ PRIKAZAN NA SLICI I OPTEREĆEN KAO NA SLICI, AKO JE POZNATO:  $F, l, \sigma_{dob}$  I AKO JE POZNAT OBLIK POPREČNOG PRESJEKA NOSAČA; DIMENZIONISATI POPREČNI PRESJEK.

10



$R_A = 5F \uparrow$   
 $R_B = 0$

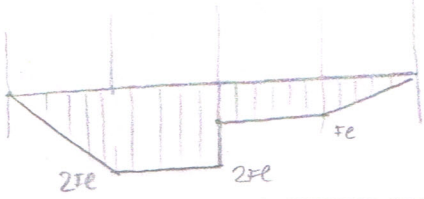
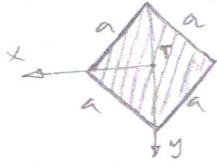
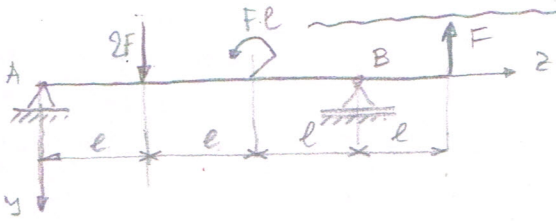
$I_x = I_y = \frac{(2a)^4}{12} - \frac{a^4}{12} = \frac{15}{12} a^4$

$y_{max} = 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$

$\sigma_{2max} = \frac{M_{smx}}{I_x} \cdot y_{max} = \frac{2Fl}{\frac{15}{4} a^4} \cdot \frac{2a\sqrt{2}}{2} \leq \sigma_{dob}$

$a \geq \sqrt[3]{\frac{24\sqrt{2} Fl}{15 \sigma_{dob}}}$

20



$R_B = F \downarrow$   
 $R_A = 2F \uparrow$

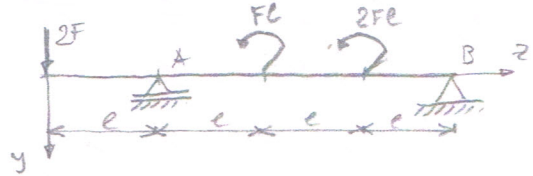
$M_{smx} = 2Fl$

$y_{max} = a\sqrt{2}/2$

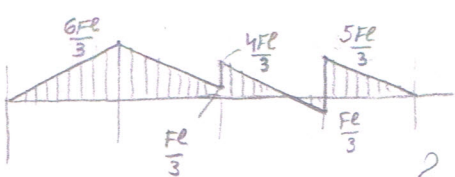
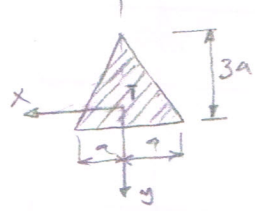
$I_x = \frac{a^4}{12}$

$\sigma_{2max} = \frac{2Fl \cdot a\sqrt{2}}{\frac{a^4}{12} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{12\sqrt{2} Fl}{a^3} \leq \sigma_{dob} \Rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{12\sqrt{2} Fl}{\sigma_{dob}}}$

30



$R_A = \frac{11F}{3} \uparrow$   
 $R_B = \frac{5F}{3} \downarrow$



$R_A = \frac{11}{3} F \uparrow$

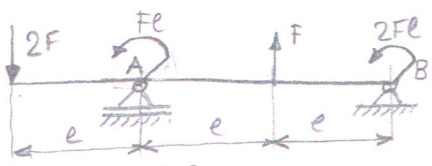
$R_B = \frac{5}{3} F \downarrow$

$I_x = \frac{a \cdot (3a)^3}{36} \cdot 2 = \frac{3}{2} a^4$

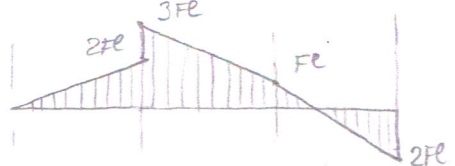
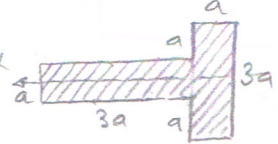
$y_{max} = \frac{2}{3} \cdot 3a = 2a$ ,  $M_{smx} = 2Fl$

$\sigma_{2max} = \frac{2Fl \cdot 2a}{\frac{3}{2} a^4} = \frac{8Fl}{3a^3} \leq \sigma_{dob}$ ;  $a \geq \sqrt[3]{\frac{8Fl}{3 \sigma_{dob}}}$

40



$R_A = 4F \uparrow$   
 $R_B = 3F \downarrow$



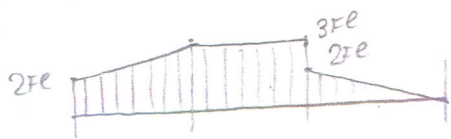
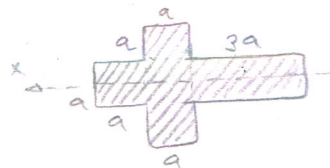
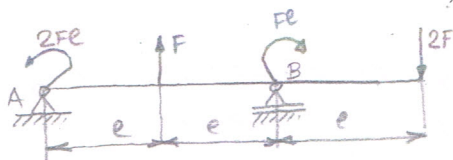
$I_x = \frac{3a \cdot a^3}{12} + \frac{a(3a)^3}{12} = \frac{30a^4}{12} = \frac{5}{2} a^4$

$y_{max} = \frac{3}{2} a$ ,  $M_{smx} = 3Fl$

$\sigma_{2max} = \frac{3Fl}{\frac{5}{2} a^4} \cdot \frac{3}{2} a = \frac{9Fl}{5a^3} \leq \sigma_{dob}$

$a \geq \sqrt[3]{\frac{9Fl}{5 \sigma_{dob}}}$

5°



$$R_A = F \downarrow \quad R_B = 2F \uparrow$$

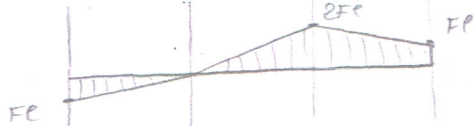
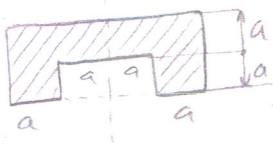
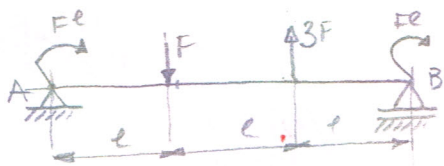
$$I_x = \frac{4a \cdot a^3}{12} + \frac{a(3a)^3}{12} = \left(\frac{4}{12} + \frac{27}{12}\right)a^4 = \frac{31a^4}{12}$$

$$y_{max} = \frac{3}{2}a \quad M_{smax} = 3Fe$$

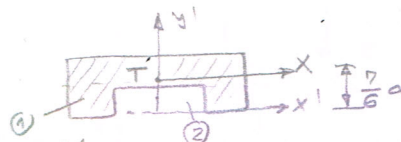
$$\sigma_{max} = \frac{3Fe}{\frac{31a^4}{12}} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{54Fe}{31a^3} \leq \sigma_{dob}$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{54Fe}{31\sigma_{dob}}}$$

6°



$$R_A = F \downarrow \quad R_B = F \downarrow$$



$$x_T = 0 \quad y_T = \frac{a(2a)^2 - \frac{a}{2} \cdot 2a^2}{(2a)^2} = \frac{7}{6}a$$

$$I_x = \left[ \frac{4a(2a)^3}{12} + \left(\frac{a}{6}\right)^2 2a^2 \right] - \left[ \frac{2a a^3}{12} + \left(\frac{4a}{6}\right)^2 2a^2 \right]$$

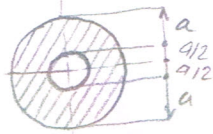
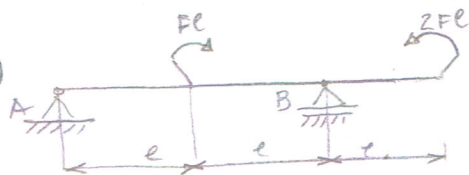
$$\sigma_{max} = \frac{F \cdot 2 \cdot Fe}{11a^4} \cdot \frac{7}{6}a = \frac{14Fe}{11a^3} \leq \sigma_{dob}$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{14Fe}{11\sigma_{dob}}}$$

$$I_x = \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{6} - \frac{8}{9}\right)a^4 = \frac{11a^4}{6}$$

$$y_{max} = \frac{7a}{6} \quad M_{smax} = 2Fe \quad \sigma_{max} = \frac{2Fe}{\frac{11a^4}{6}} \cdot \frac{7}{6}a$$

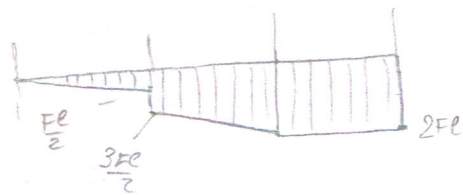
7°



$$I_x = \frac{\pi(3a)^4}{64} = \frac{27\pi a^4}{64}$$

$$y_{max} = \frac{3a}{2}$$

$$M_{smax} = 2Fe$$

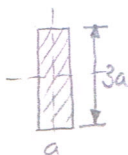
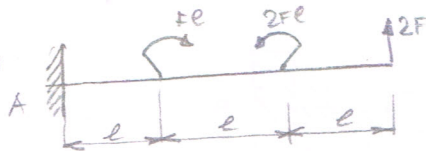


$$R_A = \frac{F}{2} \uparrow \quad R_B = \frac{F}{2} \downarrow$$

$$\sigma_{max} = \frac{2Fe \cdot 64 \cdot \frac{3a}{2}}{27\pi a^4} = \frac{64Fe}{9\pi a^3} \leq \sigma_{dob}$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{64Fe}{9\pi\sigma_{dob}}}$$

8°



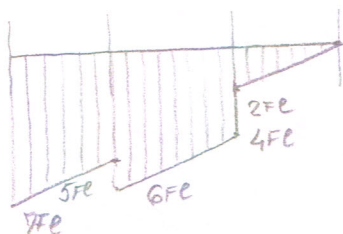
$$I_x = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} = \frac{9}{4}a^4$$

$$y_{max} = \frac{3}{2}a$$

$$M_{smax} = 7Fe$$

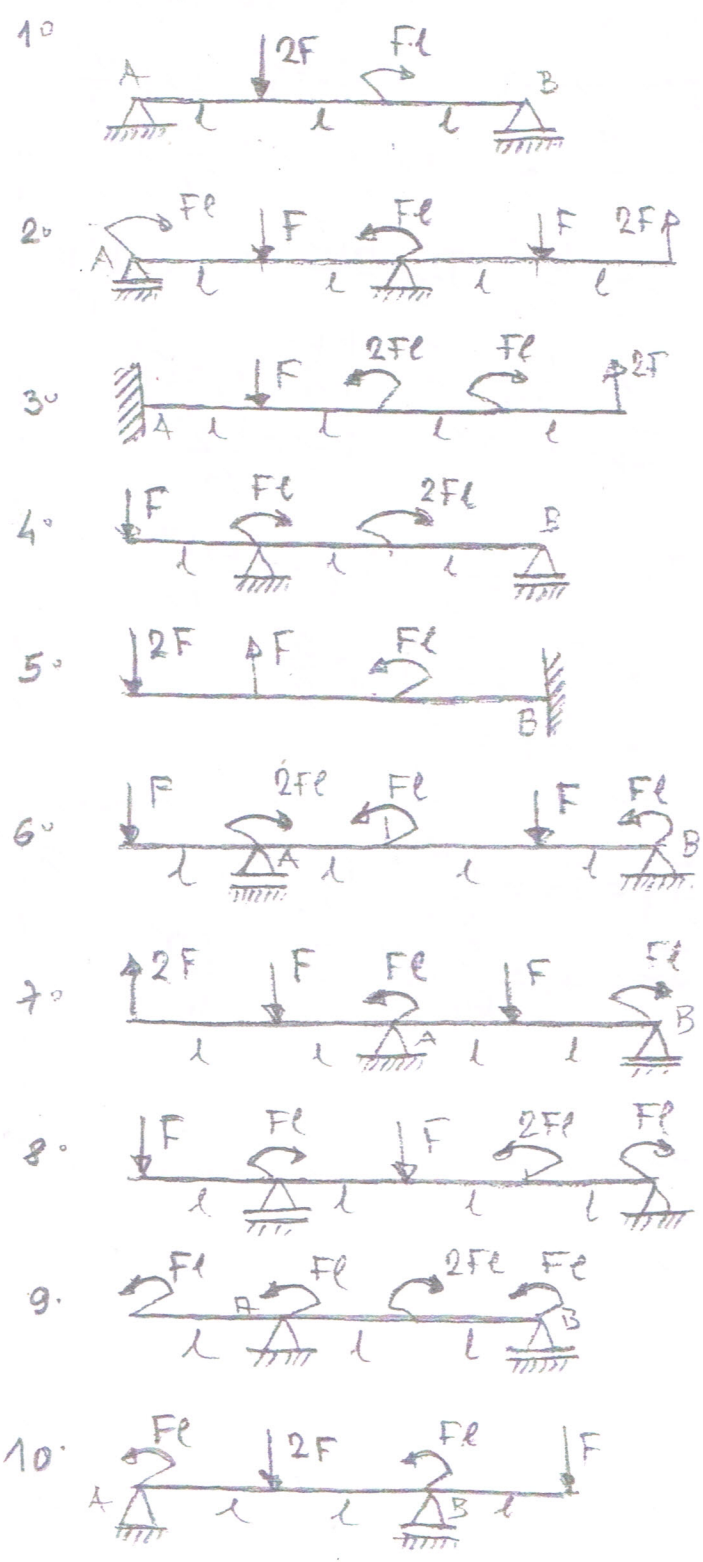
$$\sigma_{max} = \frac{7Fe}{\frac{9}{4}a^4} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{14Fe}{3a^3} \leq \sigma_{dob}$$

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{14Fe}{3\sigma_{dob}}}$$

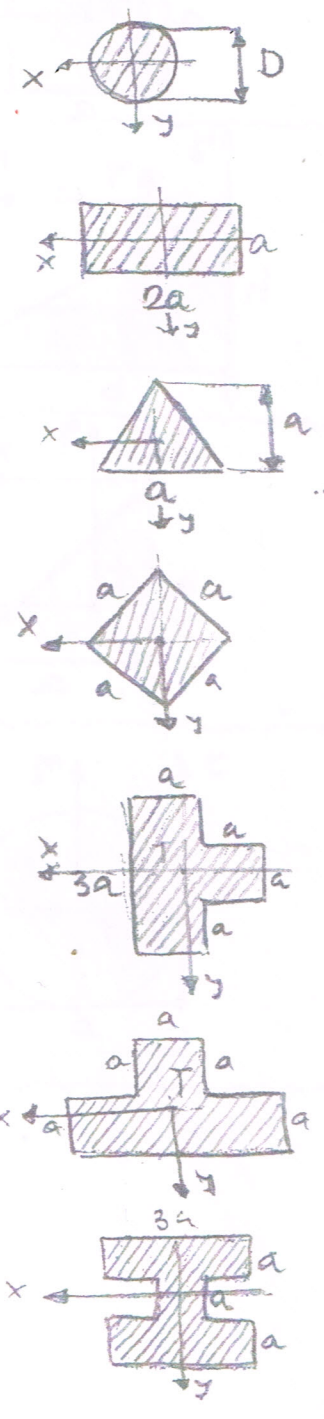


# ZADACI ZA VJEŽBANJE

**PRIMJER** ZA GREDNE NOSAČE OPTEREĆENE KAO NA SLICI ODREDITI MAXIMALNI NORMALNI NAPON  $\sigma_{2, max}$  A ZANIM IZVESTI IZRAZ ZA DIMENZIONISANJE.  
 DATO JE:  $F, l; \sigma_{0,02}$ .



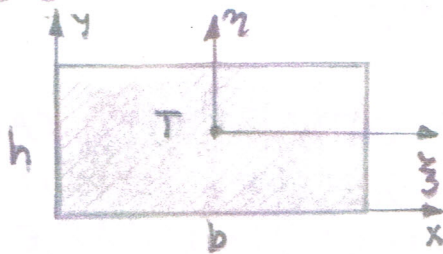
POPREČNI PRESJECI





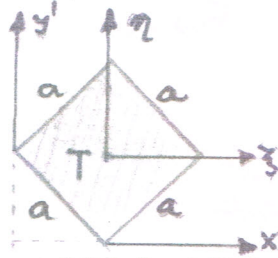
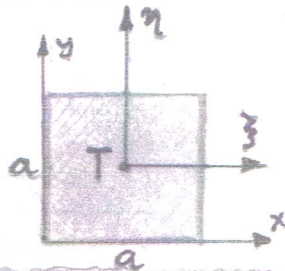
# TABLICA

## MOMENTA INERCIE JEDNOSTAVNIH RAVNIH POUKSI



$$I_z = \frac{bh^3}{12}; I_\eta = \frac{hb^3}{12}; I_{z\eta} = 0$$

$$I_x = \frac{bh^3}{3}; I_y = \frac{hb^3}{3}; I_{xy} = \frac{b^2h^2}{4}$$

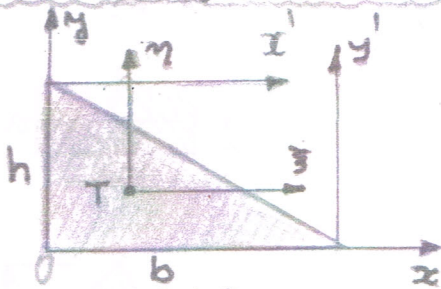


$$I_z = I_\eta = \frac{a^4}{12}; I_{z\eta} = 0$$

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{3}; I_{xy} = \frac{a^4}{4}$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{7}{12} a^4$$

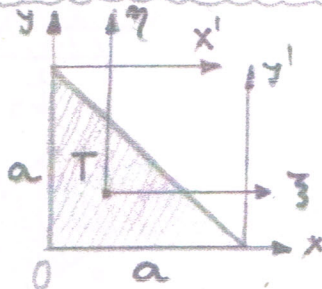
STR 17  
PRIME 10



$$I_z = \frac{bh^3}{36}; I_\eta = \frac{hb^3}{36}; I_{z\eta} = \pm \frac{b^2h^2}{72}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12}; I_y = \frac{hb^3}{12}; I_{xy} = \pm \frac{b^2h^2}{24}$$

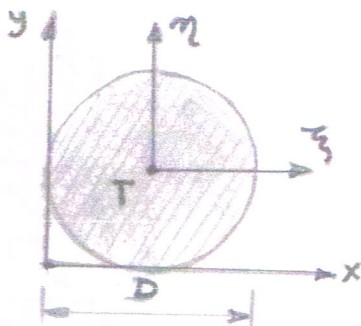
$$I_{x'} = \frac{bh^3}{4}; I_{y'} = \frac{hb^3}{4}$$



$$I_z = I_\eta = \frac{a^4}{36}; I_{z\eta} = \pm \frac{a^4}{72}$$

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}; I_{xy} = \frac{a^4}{24}$$

$$I_{x'} = I_{y'} = \frac{a^4}{4}$$



$$I_z = I_\eta = \frac{\pi D^4}{64}; I_{z\eta} = 0$$

$$I_x = I_y = \frac{5}{64} \pi D^4; I_{xy} = \frac{\pi D^4}{16}$$